Lycée M^{ed} Reda Slaoui
Centre Des Classes Préparatoires
Agadir

Année Scolaire : 04/05
BCPST 1

Devoir surveillé n°8

20/06/2005

Durée 2heures

Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qu'il vous plaira.

Exercice 1.

Pour contrôler le stock d'un magasin comprenant une dizaine de milliers d'articles, on extrait un échantillon de 100 articles. On a trouvé quatre articles défectueux.

1. Montrer que le nombre X d'articles défectueux est une variable aléatoire binomiale dont il convient de préciser les paramètres. Calculer son espérance et son écart-type.
2. En utilisant l'inégalité de Bienayamé-Tchebychev, donner une borne inférieure de la probabilité que X soit comprise entre 0 et 8, bornes exclues.

Exercice 2.

Soit Ω un espace probabilisé. X est la variable aléatoire discrète uniforme sur $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1. Définir la loi de probabilité de X et calculer sa moyenne et sa variance.
2. Nous considérons le couple de variables aléatoires (X, X^2).
   (a) définir la loi du couple (X, X^2), donner les lois marginales.
   (b) Calculer la covariance du couple (X, X^2).
   (c) Les variables aléatoires X et X^2 sont-elles indépendantes ?
3. La covariance nulle de deux v.a.r X et Y entraîne-elle leur indépendance ?

Exercice 3.

Un sac contient deux boules noires et huit rouges. On extrait simultanément n boules de ce sac (n entier naturel tel que $1 \leq n \leq 8$)

On suppose que lors de chaque tirage, toutes les boules qui sont dans le sac ont la même probabilité d'être tirées. Nous désignons par X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires parmi les boules tirées.

1. Quelle la loi de X ? préciser ces paramètres. En déduire la probabilité d'avoir au moins une boule noire.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles cette probabilité est strictement supérieure à $\frac{2}{3}$, puis calculer cette probabilité pour chaque valeur de n trouvée.

Exercice 4.

À la suite de la découverte dans un pays A des premières cas d'une maladie contagieuse non mortelle M, il a été procédé dans ce pays à une importante campagne de vaccination : 70% des habitants de A ont été vaccinés.

Une étude a révélé que 5% des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage qui s'est élevé à 60% chez les non-vaccinés.

1. Calculer :
   (a) La probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population ait été touché par cette maladie.
   (b) La probabilité pour qu'un individu ait été vacciné, sachant qu'il a été atteint par cette maladie.
2. Les séquelles laissées par cette maladie M sont variées mais on admet que 2% des individus malades ont subi des lésions de la vue : on réalise une enquête sur n anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue parmi eux. On supposera que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.
   (a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité $p(n)$ pour qu'au cours de cette enquête on découvre qu'il y au moins une personne souffrant de lésions des yeux consécutives à cette maladie M.
   (b) Quelle est la plus petite des valeurs de n réalisant : $p(X \geq 1) \geq 0.95$?

Exercice 5.

On considère une urne contenant $(n-2)$ boules blanches et 2 boules noires. On tire les boules une à une sans remise. On désigne par X la variable aléatoire réelle égale au rang d'apparition de la première boule noire et par Y le rang d'apparition de le seconde boule noire.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par les variables X et Y.
2. Soit $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, démontrer que $p(X = i) = \frac{2(n-i)}{n(n-1)}$ et que si $j \in \{2, 3, ..., n\}$, démontrer que $p(Y = j) = \frac{2(j-1)}{n(n-1)}$
3. Calculer l'espérance et la variance de X puis celle de Y.
4. Montrer que X et $n+1-Y$ suivent la même loi, en déduire de nouveau $E(Y)$ et $Var(Y)$.
5. Dans cette question on prend $n = 4$.
   (a) Montrer que

$$\forall (i,j) \in \{1,2,3\} \times \{2,3,4\}, P(X = i, Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \geq j \\ \frac{1}{6} & \text{si } \ i < j \end{cases}$$

   Donner, sous forme d'un tableau, la loi du couple $Z = (X, Y)$
   (b) Calculer le coefficient de corrélation des deux variables Xet Y.

Exercice 6.

Le but de l'exercice est de calculer la puissance $n-$ième de la matrice A, où A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Soit, pour tout entier n, une variable aléatoire réelle X_n définie sur un espace probabilisé.

On suppose que, pour tout entier naturel n :

• X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n, $(0 \leq p_n \leq 1)$

• les probabilités conditionnelles suivantes sont constantes :

$$p(X_{n+1} = 1/_{X_n=1}) = 0.3 \text{ , si } p(X_n = 1) \neq 0$$

$$p(X_{n+1} = 1/_{X_n=0}) = 0.9 \text{ , si } p(X_n = 0) \neq 0$$

1. Montrer que, si $0 < p_n < 1$, on a :

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ 1 - p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix}$$

   Vérifier cette formule pour $0 \leq p_n \leq 1$

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, puis p_n en fonction de n et de p_0

3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} p_n \\ 1 - p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 \\ 0.7 & 0.1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} p_0 \\ 1 - p_0 \end{pmatrix}$$

4. En considérant successivement les cas $p_0 = 1$, puis $p_0 = 0$, calculer les coefficients de la matrice A^n.

•••••••••••